

B. $(-\infty, -1] \cup (0, 3)$

D. $(0, 3)$

B. 4

C. 3

D. 2

B. 11

C. 13

D. 15

- 爱智康 4

B. 充分不必要条件

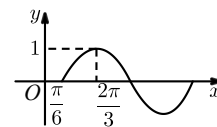
D. 既不充分也不必要条件

B. $b > c > a$

C. $b > a > c$

D. $c > b > a$

6. 函数 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$ ($x \in \mathbf{R}$) ($\omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$) 的部分图象如图所示, 如果 $x_1, x_2 \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}\right)$, 且 $f(x_1) = f(x_2)$, 则 $f(x_1 + x_2) =$ () .



- A. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ B. $-\frac{1}{2}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

7. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 . 若双曲线 C 上存在一点 P , 使得 $\triangle PF_1F_2$ 为等腰三角形, 且 $\cos \angle PF_1F_2 = \frac{7}{8}$, 则双曲线的离心率为 () .

- A. $\frac{4}{3}$ B. $\frac{3}{2}$ C. $\frac{3}{2}$ 或 3 D. $\frac{4}{3}$ 或 2

8. 已知函数 $f(x) = x^2 - x - a - 2$ 有零点 x_1, x_2 , 函数 $g(x) = x^2 - (a+1)x - 2$ 有零点 x_3, x_4 , 且 $x_3 < x_1 < x_4 < x_2$, 则实数 a 的取值范围是 () .

- A. $\left(-\frac{9}{4}, -2\right)$ B. $\left(-\frac{9}{4}, 0\right)$ C. $(-2, 0)$ D. $(1, +\infty)$

二、填空题 (本大题共6题, 每小题5分, 共计30分)

9. 已知 $a, b \in \mathbf{R}$, i 是虚数单位, 若复数 $\frac{2+bi}{1-i} = ai$, 则 $a+b =$ _____ .

10. 已知 $a \in \mathbf{R}$, 函数 $f(x) = a \cdot e^x - x \ln x$ 的图象在点 $(1, f(1))$ 处的切线为 l , 则 l 在 y 轴上的截距为 _____ .

11. 三棱锥 $P-ABC$ 中, D, E 分别为 PB, PC 的中点, 记三棱锥 $D-ABE$ 的体积为 V_1 , $P-ABC$ 的体积为 V_2 , 则 $V_1 : V_2 =$ _____ .

12. 直线 $x - y + 3 = 0$ 被圆 $(x+2)^2 + (y-2)^2 = 2$ 截得的弦长为 _____ .

13. 若正实数 a, b 满足 $(2a+b)^2 = 1+6ab$, 则 $\frac{ab}{2a+b+1}$ 的最大值为 _____ .

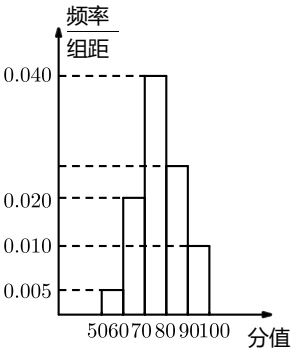
14. 在 $\triangle ABC$ 中, 点 M 满足 $\overrightarrow{MB} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$, 且对于边 AB 上任意一点 N , 恒有 $\overrightarrow{NB} \cdot \overrightarrow{NC} \geq \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC}$. 则 $(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}) \cdot \overrightarrow{AB} =$ _____ .

三、解答题（本大题共6题，共计80分）

15. 已知函数 $f(x) = \cos^2 x - \sin^2 x + \frac{1}{2}$, $x \in (0, \pi)$.

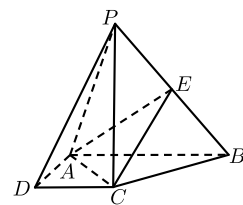
- (1) 求 $f(x)$ 的单调递增区间.
- (2) 设 $\triangle ABC$ 为锐角三角形, 角 A 所对边 $a = \sqrt{19}$, 角 B 所对边 $b = 5$, 若 $f(A) = 0$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

16. 某市为调研学校师生的环境保护意识, 决定在本市所有学校中随机抽取60所进行环境综合考评. 成绩达到80分以上 (含80分) 为达标. 60所学校的考评结果频率分布直方图如图所示 (其分组区间为 $[50, 60)$, $[60, 70)$, $[80, 90)$, $[90, 100]$).



- (1) 试根据样本估计全市学校环境综合考评的达标率.
- (2) 若考评成绩在 $[90, 100]$ 内为优秀, 且甲乙两所学校考评结果均为优秀. 从考评结果为优秀的学校中随机地抽取两所学校作经验交流报告, 求甲乙两所学校至少有一所被选中的概率.

17. 如图，四棱锥 $P-ABCD$ 中， $PC \perp$ 平面 $ABCD$ ， $AB \perp AD$ ， $AB \parallel CD$ ， $PD = AB = 2AD = 2CD = 2$ ， E 为 PB 的中点。



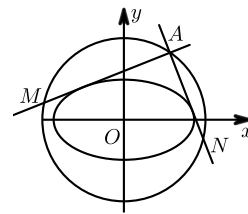
- (1) 证明：平面 $EAC \perp$ 平面 PBC 。
- (2) 求异面直线 CE 与 PD 所成角的余弦值。
- (3) 求直线 PD 与平面 AEC 所成角的正弦值。

18. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $S_3 = 9$, a_1, a_3, a_7 成等比数列.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

(2) 若数列 $\{a_n\}$ 是递增数列, 数列 b_n 满足 $b_n = 2^{a_n}$, T_n 是数列 $\{a_n b_n\}$ 的前 n 项和, 求 T_n 并求使 $T_n > 1000$ 成立的 n 的最小值.

19. 已知 A 是圆 $x^2 + y^2 = 4$ 上的一个动点, 过点 A 作两条直线 l_1, l_2 , 它们与椭圆 $\frac{x^2}{3} + y^2 = 1$ 都只有一个公共点, 且分别交圆于点 M, N .



(1) 若 $A(-2, 0)$, 求直线 l_1, l_2 的方程.

(2) 请回答下列各题:

- 1 求证: 对于圆上的任意点 A , 都有 $l_1 \perp l_2$ 成立.
- 2 求 $\triangle AMN$ 面积的取值范围.

20. 已知函数 $f(x) = x + x \ln x$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的图象在点 $(1, 1)$ 处的切线方程.

(2) 若 $k \in \mathbf{Z}$, 且 $k(x-1) < f(x)$ 对任意 $x > 1$ 恒成立, 求 k 的最大值.

(3) 当 $n > m \geq 4$ 时, 证明: $(mn^n)^m > (nm^m)^n$.